

מתמטיקה א

פרק 9 - הפונקציה הממשית

תוכן העניינים

1. פתרון תרגילי הפרק 1

הפונקציה הממשית

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $y = x^3 - x^2 - 4x + 1$ ב. $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

ג. $y = \frac{4x+1}{x^2+1}$ ד. $y = \frac{1}{x^3 - x}$

ה. $y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$ ו. $y = \sqrt{x-4}$

ז. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$ ח. $y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$

ט. $y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$ י. $y = \ln(x^2 + x - 2)$

יא. $y = \log x + \frac{1}{\log x}$ יב. $y = e^{x^2+x+1}$

יג. $y = \log_x(x+4)$ יד. $y = \tan(10x)$

טו. $y = \cot(4x)$ טז. $y = \arctan(x+4)$

יז. $y = \arcsin(x-4)$ יח. $y = \arccos(x+1)$

(2) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x-4$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \frac{4}{x}$.

חשב את הפונקציות המרוכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $h(f(x))$ ו. $h(h(x))$

(3) נתון: $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$. חשב $f(f(x))$ עבור $x=3$.

(4) נתון: $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$. חשב $f(g(x)) + g(f(x))$ עבור $x=8$.

(5) נתון: $f(x) = x^2 - 7x$ $g(x) = \ln x$. חשב $f(g(x))$ עבור $x = e^2$.

(6) נתון: $f(x) = e^{2x}$ $g(x) = \ln x$. חשב $f(g(x))$ עבור $x=2$.

(7) נתון: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$. חשב $f(g(x))$, $g(f(x))$.

(8) בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה.

א. $f(x) = \frac{x-1}{3}$ ב. $f(x) = \frac{x+1}{x}$

ג. $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$ ד. $f(x) = x^2 - 4, x \geq 0$

(9) בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה:

א. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ב. $f(x) = x^2 - x$ ג. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

(10) בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצא את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

א. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ב. $y = \frac{x^2+3}{2x-1}$ ג. $f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^3$

(11) נתונה $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$. האם הפונקציה היא חח"ע?

מצא את התמונה של הפונקציה.

(12) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות הן אי זוגיות ואיזה זוגיות:

- | | | |
|----------------------|------------------------------|--------------|
| א. $y = 4x^3$ | ב. $y = x^4 + x^{10}$ | ג. $y = 1$ |
| ד. $y = \frac{1}{x}$ | ה. $y = x^2 + \sin^2 x$ | ו. $y = 2^x$ |
| ז. $y = \ln x + x^2$ | ח. $y = \sin x \cdot \cos x$ | |

(13) מצא את המחזור של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| א. $y = 2 \sin x$ | ב. $y = 5 + 3 \sin(4x + 1)$ |
| ג. $y = \tan \frac{x}{3}$ | ד. $y = \sin^2 x$ |

(14) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מפוצלת¹ ושרטט את גרף הפונקציה:

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| א. $y = x - 2 $ | ב. $y = 3 x + 1 $ |
| ג. $y = x^2 + 2 x - 1 $ | ד. $y = \frac{ x }{x}$ |

תשובות סופיות:

- | | | | |
|-----------------------|--|------------------------------|----------------------|
| א. כל x | ב. $x \neq \pm 2$ | ג. כל x | ד. $x \neq 0, 1, -1$ |
| ה. $x \neq 2, -1$ | ו. $x \geq 4$ | ז. $x \leq -2, x \geq 1$ | ח. כל x |
| ט. $-1 < x < 1$ | י. $x < -2, x > 1$ | יא. $x > 0, x \neq 1$ | יב. כל x |
| יג. $x > 0, x \neq 1$ | יד. $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$ | טו. $x \neq \frac{\pi k}{4}$ | טז. כל x |
| יז. $3 < x < 5$ | יח. $-2 < x < 0$ | | |

¹ נקראת גם: פונקציה "מפוצלת", "מוטלאת", פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקרים".

(2) א. -3 ב. 4 ג. $x^2 - 4$ ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. x

(3) 3 (4) $\frac{69}{13}$ (5) -10 (6) 4

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (7)$$

(8) א. $f^{-1}(x) = 3x+1$, כל y . ב. $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$, $y \neq 1$

ג. $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$, $y \neq 3$. ד. $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, $y \geq -4$

(9) א. לא. ב. לא. ג. לא. ד. לא. $y \geq 2$ או $y \leq -2$. $y - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{x + \frac{1}{4}}$, $x + \frac{1}{4} \geq 0$

ג. לא. $0 \leq y \leq 1$

(10) א. כן. ב. לא. ג. כן. ד. לא. $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x > 0$, $y > 0$. $y \leq -1.3$ או $y \geq 2.3$

ג. כן. $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$, $y \neq 1$

(11) לא. $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$

(12) זוגית: 2,3,5,8. אי-זוגית: 1,4. כלליות: 6,7.

(13) א. 2π . ב. $\frac{\pi}{2}$. ג. 3π . ד. π

(14) א. $y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$. ב. $y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases}$

ג. $y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases}$. ד. $y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$